FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Ewa Lubaś

Wybrane problemy zadań konstrukcyjnych na płaszczyźnie euklidesowej i wykorzystanie do ich rozwiązywania twierdzeń geometrii rzutowej

Abstract. The article gives examples of construction tasks of first and second degree on a Euclidean plane, which can be solved with the use of a simple ruler. For this purpose the theoretical backgrounds of projective geometry have been used. It has been proved that in the projective approach some constructions on a Euclidean plane become linear constructions. In particular, a linear construction of this type may be the typical operation of inversion in respect of a circle and an arbitrary conic as well as its generalisation, which in reference literature is known under the name of Hirst transformation.

1. Wstęp

Problemy konstrukcyjne, zarówno na płaszczyźnie, jak również w przestrzeni, występują bardzo często w ludzkiej działalności. W wielu zawodach ich rozwiązywanie jest wręcz niezbędne. Stąd byłoby wskazane, aby od wczesnych lat szkolnych wdrażać uczniów do rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. W ostatnich latach w nauczaniu są one coraz bardziej zaniedbywane, wręcz usuwane z programów. Zwykle kojarzone są one z przyrządami do kreślenia, co wydaje się zbędne, gdy używa się komputerów w nauczaniu. To bardzo zawężony pogląd. Rozwiązanie zadania konstrukcyjnego wymaga niejednokrotnie zaawansowanej wiedzy geometrycznej, w której znajdują miejsce nie tylko własności różnych figur, ale również przekształcenia geometryczne, algebra geometryczna. Uczą one logicznego myślenia, ścisłości rozumowania, umiejętnego poszukiwania warunków koniecznych i wystarczających do istnienia rozwiązania, uzasadniania poszczególnych kroków myślowych, weryfikacji otrzymanego rozwiązania, rozwijają intuicję matematyczną, a ponadto są doskonałym zastosowaniem zdobytej wiedzy geometrycznej. Nie sposób w jednym artykule omówić dokładnie wszystkie aspekty rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Ograniczymy się tu jedynie do podania kilku przykładów zastosowania teorii geometrii rzutowej do rozwiązywania zadań na płaszczyźnie euklidesowej. W kursie geometrii na studiach nauczycielskich niewiele czasu poświęca się geometrii rzutowej, tymczasem wiadomo, że obejmuje ona geometrie: afiniczną, euklidesową i nieeuklidesową.

W tym artykule podano przykłady liniowych zadań konstrukcyjnych, to jest takich, których rozwiązanie wymaga jedynie prowadzenia prostych. Zadania te są rozwiązywane na płaszczyźnie euklidesowej, uzupełnionej punktami niewłaściwymi (która w ten sposób staje się modelem płaszczyzny rzutowej), z wykorzystaniem twierdzeń geometrii rzutowej. Takie ujęcie wydaje się korzystne pod względem dydaktycznym, bo oprócz tego, że sugeruje inne od być może znanych sposobów rozwiązania zadań konstrukcyjnych na płaszczyźnie euklidesowej, to również pozwala lepiej poznać geometrię rzutową.

2. Przykłady liniowych zadań konstrukcyjnych stopnia pierwszego i stopnia drugiego

W geometrii rzutowej jest znanych wiele zadań stopnia pierwszego (tj. takich, które w geometrii analitycznej sprowadzają się do rozwiązywania równań stopnia pierwszego), do konstrukcji których wystarcza sama linijka. Oto przykładowe z nich:

- wyznaczenie prostej przechodzącej przez dany punkt i niedostępny punkt przecięcia dwóch danych prostych,
- wyznaczenie punktu wspólnego danej prostej z prostą, na której zaznaczone są dwa różne punkty, ale narysowanie tej prostej jest niemożliwe,
- konstrukcja trójkąta wpisanego w dany trójkąt tak, aby jego boki przechodziły odpowiednio przez dane trzy różne punkty należące do jednej prostej,
- konstrukcja punktu czwartego harmonicznego do trzech danych punktów pewnej prostej.

Zadania tego typu można rozwiązać samą linijką korzystając na przykład z twierdzenia Desarques'a. Można je znaleźć między innymi w książce (Fudali, 1989, s. 274-278).

W tym artykule podano przykłady pewnych zadań stopnia drugiego, czyli zadań konstrukcyjnych na płaszczyźnie rzutowej, posiadających najwyżej dwa rozwiązania.

Niektóre z tych zadań, jak pokazano, można również rozwiązywać graficznie przy pomocy samej linijki. W tym celu wystarczy przyjąć, że na płaszczyźnie rzutowej narysowana jest pewna stożkowa.

W przytoczonych zadaniach wykorzystano rzutowe własności stożkowych. Przypomnimy niektóre z nich. Obszerniejszą rzutową teorię krzywych stożkowych może Czytelnik znaleźć między innymi w książkach (Четверухин, 1969; Комиссарук, 1971; Pedoe, 1963).

Rzutowa definicja stożkowej

Definicja
Przez stożkową (inaczej krzywą drugiego rzędu) w ujęciu rzutowym rozumie się miejsce geometryczne punktów przecięcia odpowiadających sobie prostych dwóch pęków rzutowych o różnych środkach, zawartych w jednej płaszczyźnie.

Przyjmując taką definicję, można udowodnić:

Twierdzenie I
Rzutując punkty stożkowej z jej dwu dowolnych różnych punktów, otrzymuje się dwa rzutowe pęki prostych.

Jak wiadomo, dwa rzutowe pęki prostych tej samej płaszczyzny określone są przez podanie trzech par odpowiadających sobie prostych.
Wynika stąd w szczególności:

Twierdzenie II
Pięć punktów należących do jednej płaszczyzny, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej, określa dokładnie jedną stożkową przechodzącą przez te punkty.

Twierdzenie III (Pascala)
Punkty przecięcia par przeciwległych boków sześciokąta zupełnego wpisanego w stożkową należą do jednej prostej zwanej prostą Pascala.

Twierdzenie Pascala zachodzi również w przypadku, gdy dwa wierzchołki sześciokąta wpisanego w stożkową pokrywają się (mamy wówczas pięciokąt zupełny wpisany w stożkową, a bok sześciokąta staje się styczną do stożkowej w tym wierzchołku), lub dwie pary wierzchołków sześciokąta pokrywają się, czyli dany jest czworokąt zupełny wpisany w stożkową i styczne do stożkowej w dwu wierzchołkach tego czworokąta lub trzy pary wierzchołków sześciokąta pokrywają się, przez co otrzymuje się trójkąt wpisany w stożkową i trzy proste styczne do stożkowej w wierzchołkach tego trójkąta.
Twierdzeniem dualnym do twierdzenia Pascala jest:

Twierdzenie IV (Brianchona)
Proste przechodzące przez przeciwległe wierzchołki sześcioboku opisanego na stożkowej przecinają się w jednym punkcie.

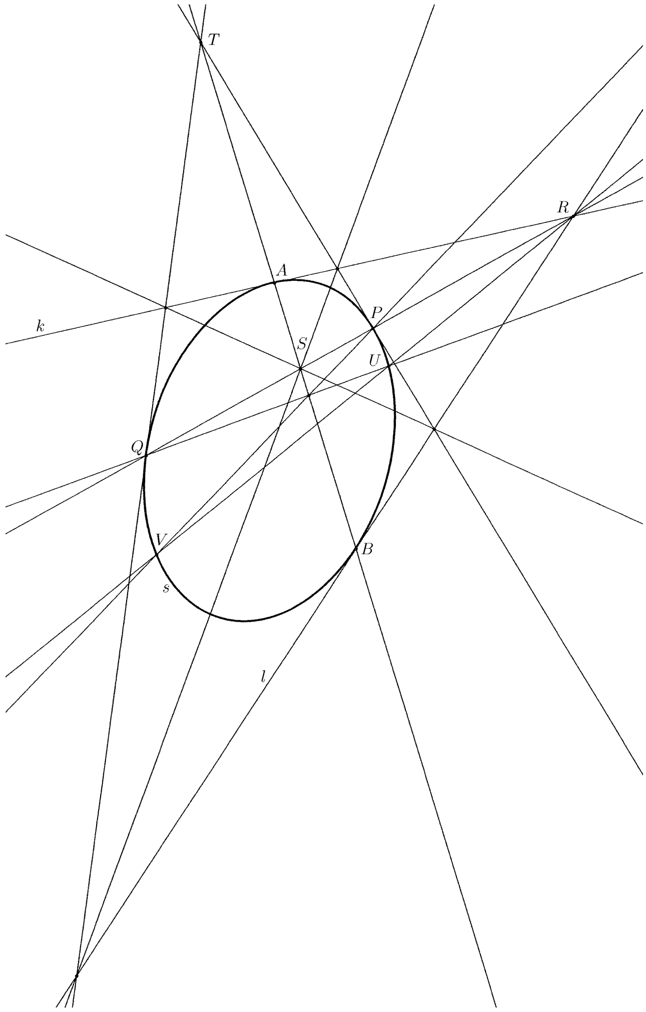
Wynika stąd w szczególności:

Twierdzenie V
Proste przechodzące przez przeciwległe wierzchołki czworoboku zupełnego opisanego na stożkowej i proste przechodzące przez punkty styczności przeciwległych boków tego czworoboku przecinają się w jednym punkcie.

Korzystając z tego twierdzenia i definicji relacji rozdzielania harmonicznego w geometrii rzutowej, można łatwo udowodnić:

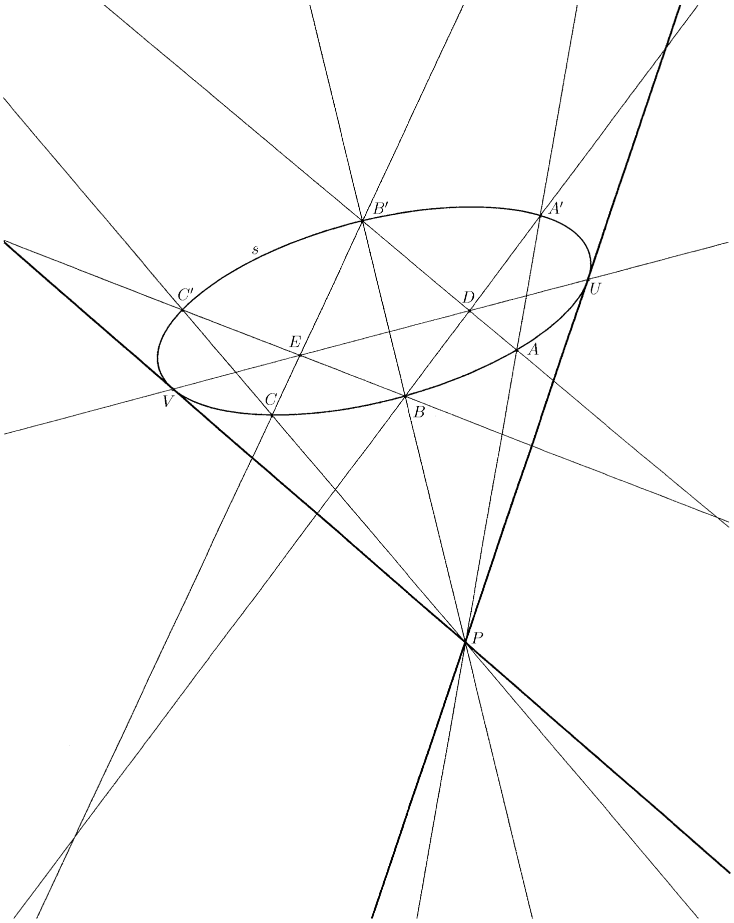
Twierdzenie VI

Jeżeli proste k, l są stycznymi do stożkowej s w różnych punktach A, B tej stożkowej, a m jest dowolną prostą przechodzącą przez punkt R wspólny prostych k, l i przecinającą tę stożkową w dwu różnych punktach P, Q (rys. 1), to para (PQ) rozdziela harmonicznie parę (RS), gdzie S jest punktem wspólnym prostej AB i prostej m.



Rysunek 1.

Wynika stąd, że prosta AB jest biegunową punktu R względem tej stożkowej. Jest ona również zbiorem punktów stałych w inwolucyjnym przekształceniu rzutowym, odwzorowującym stożkową s na siebie, wyznaczonym przez pary punktów przecięcia prostych pęku (R) z tą stożkową. Na rysunku 1 takimi parami są (PQ), (UV). Wynika stąd w szczególności, że proste PV i QU przecinają się na prostej AB. To spostrzeżenie pozwala w prosty sposób skonstruować samą linijką proste styczne do narysowanej stożkowej, przechodzące przez punkt leżący na zewnątrz tej stożkowej. Konstrukcję taką przedstawia rysunek 2.



Rysunek 2.

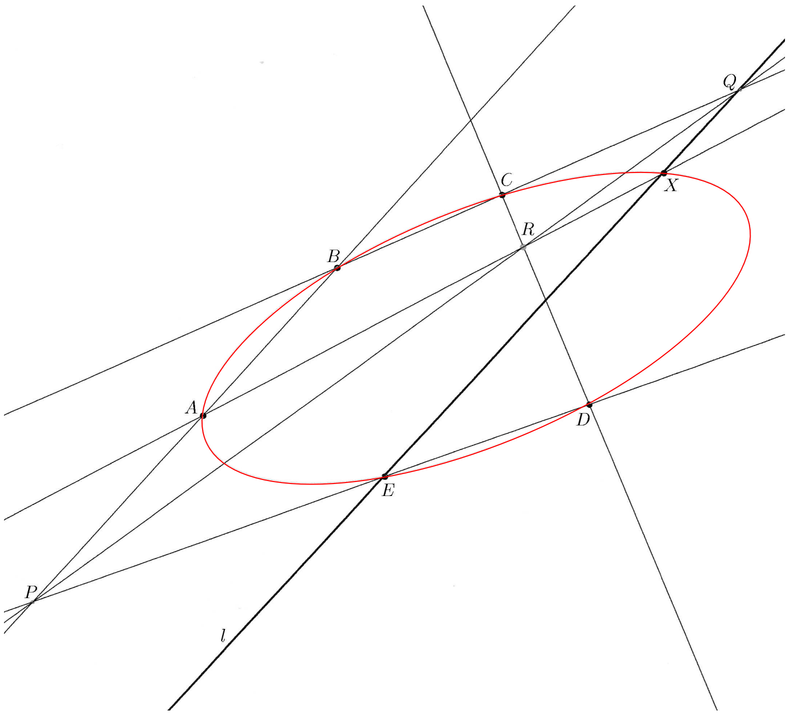
Przez punkt P leżący na zewnątrz stożkowej poprowadzono trzy proste przecinające tę stożkową w parach punktów: (AA'), (BB'), (CC'). Prosta DE, gdzie D jest punktem wspólnym prostych AB' i $A'B$, a E jest punktem wspólnym prostych BC' i $B'C$, przecina stożkową w punktach U, V. Proste PU i PV są stycznymi do tej stożkowej.

Do zadań konstrukcyjnych wykonalnych samą linijką i dotyczących stożkowych nie wymagających dodatkowo narysowanej stożkowej należą na przykład:

1) wyznaczenie drugiego punktu przecięcia stożkowej określonej pięcioma punktami, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej (lub czterema punktami i styczną w jednym z tych punktów, lub trzema punktami i stycznymi w dwóch z danych punktów), z prostą przechodzącą przez jeden z tych punktów,
2) konstrukcja stycznej do stożkowej (określonej jak powyżej) w danym punkcie tej stożkowej.

Do rozwiązania tych zadań wystarczy zastosować jedynie twierdzenie Pascala.

W przypadku pierwszego z tych zadań, stożkową s zadano przez pięć punktów A, B, C, D, E, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej, prostą l poprowadzono przez punkt E (A, B, C, D nie należą do tej prostej) (rysunek 3).

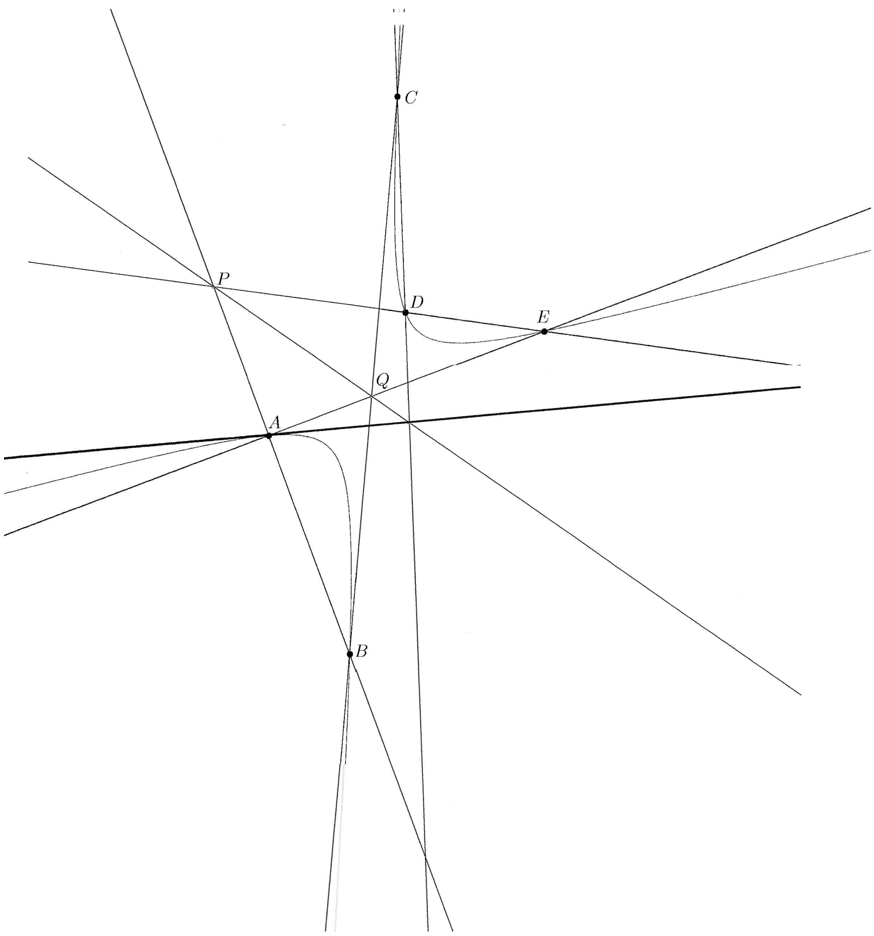


Rysunek 3.

Oznaczając przez X drugi z punktów wspólnych prostej l i stożkowej s oraz stosując twierdzenie Pascala do sześciokąta $ABCDEX$ wpisanego w tę stożkową, stwierdzamy, że prostą Pascala dla tego sześciokąta jest prosta przechodząca przez punkt przecięcia prostych AB i ED (na rysunku 3 punkt P), oraz przez punkt wspólny prostej BC i prostej l (punkt Q).

X jest punktem wspólnym prostej l i prostej AR, gdzie R jest punktem wspólnym prostych PQ i CD.

W drugim zadaniu dla skonstruowania stycznej do stożkowej $ABCDE$ w punkcie A, wzięto pod uwagę sześciokąt $ABCDEA$ wpisany w stożkową (punkt A policzono podwójnie) (rysunek 4).



Rysunek 4.

Prosta Pascala dla tego sześciokąta przechodzi tu przez punkt przecięcia prostych AB i DE (na rysunku 4 punkt P), oraz punkt wspólny prostych BC i AE (punkt Q).

Styczna do stożkowej w punkcie A przechodzi przez A i punkt wspólny prostej CD z prostą Pascala.

3. Przykłady liniowych zadań konstrukcyjnych stopnia drugiego na płaszczyźnie euklidesowej z narysowaną na niej jedną stożkową

Do konstrukcyjnego rozwiązania przedstawionych zadań stopnia drugiego przyjęto dodatkowo narysowaną stożkową. Wykorzystano w nich m.in. następujące twierdzenia geometrii rzutowej.

Twierdzenie VII (Pierwsze twierdzenie Desarques'a (dotyczące stożkowych))
Jeżeli czworokąt zupełny jest wpisany w stożkową, to dowolna prosta nie będąca prostą zewnętrzną względem stożkowej i nie przechodząca przez żaden z wierzchołków tego czworokąta przecina stożkową w dwu punktach sprzężonych z sobą (odpowiadających sobie) w inwolucji, do której należą pary punktów przecięcia tej prostej z przeciwległymi bokami czworokąta.

Twierdzenie VIII (Drugie twierdzenie Desarques'a (dotyczące stożkowych))
Jeżeli trójkąt jest wpisany w stożkową, to dowolna prosta płaszczyzny nie będąca prostą zewnętrzną względem stożkowej i nie przechodząca przez żaden z wierzchołków danego trójkąta przecina stożkową w dwu punktach sprzężonych z sobą w inwolucji, do której należą: para punktów przecięcia tej prostej z dwoma bokami trójkąta i para punktów, z których jeden jest punktem przecięcia tej prostej z trzecim bokiem trójkąta, a drugi jest punktem wspólnym danej prostej i stycznej do stożkowej w przeciwległym wierzchołku trójkąta.

Przez inwolucję na stożkowej rozumie się takie nietożsamościowe przekształcenie rzutowe stożkowej na siebie, które jest identyczne z przekształceniem do niego odwrotnym.

Twierdzenie IX
W inwolucji na stożkowej punkty sprzężone należą do prostych przechodzących przez jeden punkt, który nosi nazwę środka inwolucji stożkowej.

Twierdzenie X
Każdy punkt płaszczyzny rzutowej zawierającej stożkową, nie należący do niej, może być uważany za środek pewnej inwolucji na tej stożkowej.

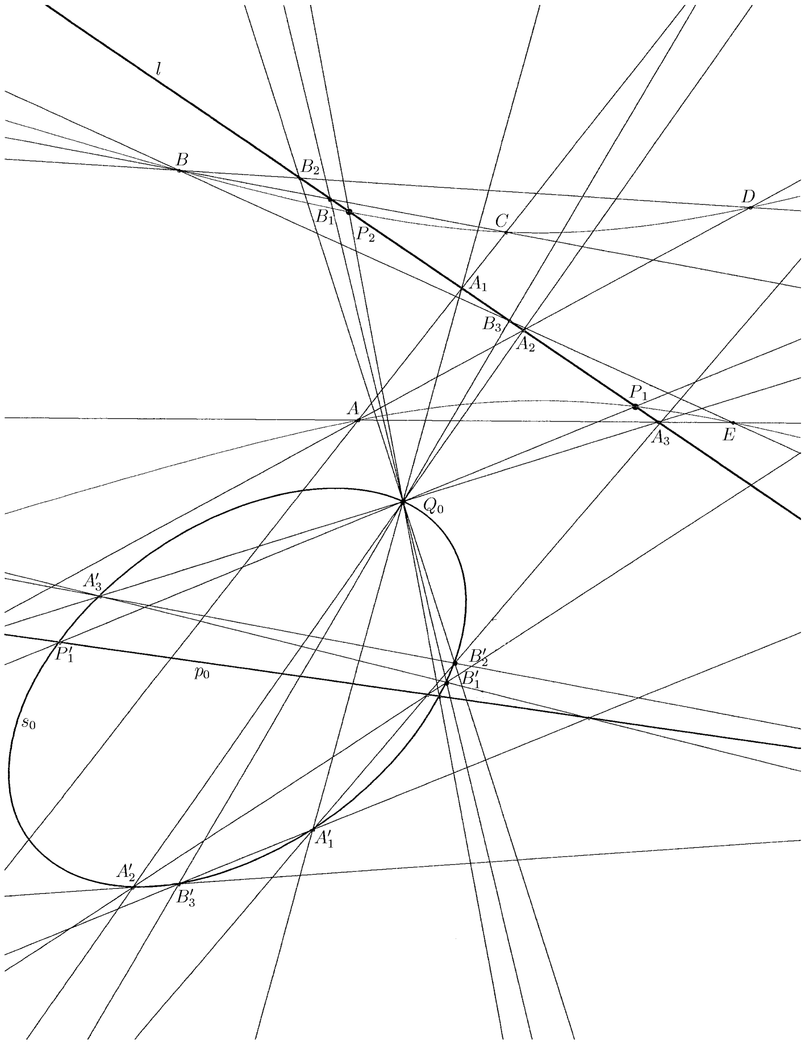
Przykłady zadań konstrukcyjnych z narysowaną dodatkowo stożkową.

Zadanie 1

Wyznaczyć (o ile istnieją) punkty wspólne stożkowej określonej przez pięć punktów A, B, C, D, E, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej, z daną prostą l nie przechodzącą przez żaden z tych punktów.

Proponowane rozwiązanie:

Niech s_0 będzie narysowaną stożkową na płaszczyźnie, s stożkową wyznaczoną przez punkty A, B, C, D, E (rysunek 5).



Rysunek 5.

Rzutując z punktów A, B, punkty C, D, E, otrzymujemy dwa rzutowe pęki prostych:

$$A(AC, AD, AE, \ldots) \barwedge B(BC, BD, BE, \ldots).$$

Zbiorem punktów wspólnych odpowiadających sobie w tym przekształceniu rzutowym prostych jest stożkowa s. Przekształcenie rzutowe pęków (A), (B) indukuje na prostej l przekształcenie rzutowe punktów prostej l, wyznaczone przez punkty wspólne odpowiednich prostych tych pęków z prostą l, czyli

$$l(A_1, A_2, A_3, \ldots) \barwedge l(B_1, B_2, B_3, \ldots).$$

Punkty zjednoczone tego przekształcenia rzutowego na prostej l są punktami wspólnymi tej prostej i stożkowej s.

Dla ich wyznaczenia zrzutowano punkty A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 na stożkową s_0 z punktu Q_0 należącego do tej stożkowej, otrzymując na s_0 przekształcenie rzutowe

$$s_0(A'_1, A'_2, A'_3, \ldots) \barwedge s_0(B'_1, B'_2, B'_3, \ldots).$$

Punkty zjednoczone (stałe) P'_1, P'_2 tego przekształcenia rzutowego są punktami przecięcia stożkowej s_0 z prostą Pascala p_0 sześciokąta $A'_1B'_2A'_3B'_1A'_2B'_3$ wpisanego w tę stożkową. Ta prosta Pascala nazywa się osią przekształcenia rzutowego na stożkowej, a biegun tej prostej względem stożkowej nosi nazwę środka przekształcenia rzutowego na tej stożkowej.

Rzutując punkty zjednoczone przekształcenia rzutowego stożkowej s_0, z punktu Q_0 na prostą l, otrzymamy punkty przecięcia tej prostej ze stożkową s (na rysunku 5 są nimi punkty P_1, P_2).

Zadanie 2

W daną stożkową wpisać trójkąt tak, aby jego boki przechodziły przez trzy dane punkty współliniowe, z których żaden nie należy do tej stożkowej.

Rozwiązanie:

Niech s będzie daną stożkową, A_0, B_0, C_0 danymi punktami prostej l (rysunek 6).

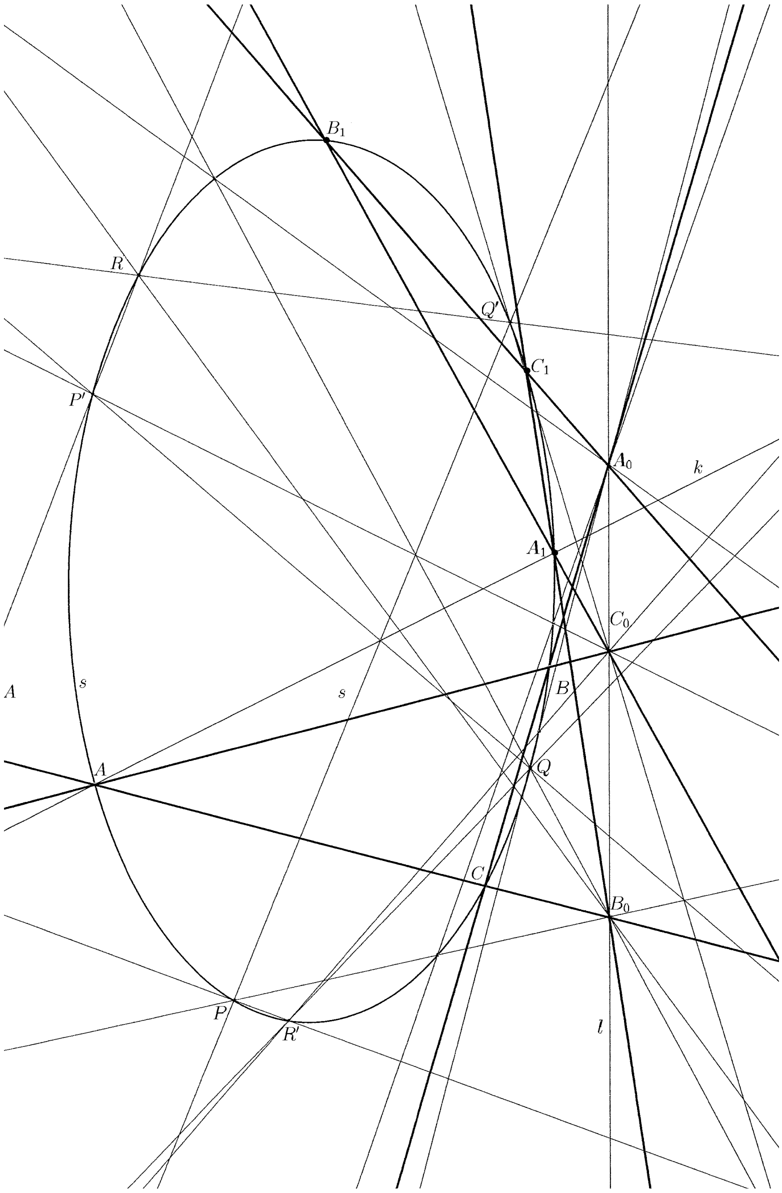
Załóżmy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania. Oznaczmy przez I_{B_0} inwolucję o środku B_0 i parze odpowiadających sobie punktów (AC), przez I_{A_0} inwolucję o środku A_0 i parze punktów (CB), oraz przez I_{C_0} inwolucję o środku C_0 i parze punktów (AB) odpowiadających sobie w tej inwolucji.

Złożenie $\varphi = I_{C_0} \circ I_{A_0} \circ I_{B_0}$ tych inwolucji jest przekształceniem rzutowym określonym na stożkowej s.

Ponieważ

$$\varphi(A) = (I_{C_0} \circ I_{A_0} \circ I_{B_0})(A) = (I_{C_0} \circ I_{A_0})(C) = I_{C_0}(B) = A,$$

więc A jest punktem stałym tego przekształcenia rzutowego.



Rysunek 6.

Rozwiązanie zadania sprowadza się zatem do wyznaczenia punktów podwójnych (stałych) przekształcenia rzutowego na stożkowej, będącego złożeniem tych trzech inwolucji.

W tym celu wybrano trzy dowolne punkty P, Q, R należące do stożkowej i wyznaczono ich obrazy w przekształceniu φ.

Na rysunku 6 mamy

$$\varphi(P) = P', \quad \varphi(Q) = Q', \quad \varphi(R) = R',$$

czyli

$$s(P, Q, R, \ldots) \overline{\wedge}\, s(P', Q', R', \ldots).$$

Osią tego przekształcenia rzutowego stożkowej jest prosta k wyznaczona przez punkt przecięcia prostych PQ' i $P'Q$ oraz przez punkt przecięcia prostych PR' i RP'.

Każdy z punktów przecięcia prostej k z tą stożkową daje jedno rozwiązanie zadania.

Uwaga: Zadanie rozwiązano w przypadku, gdy cała stożkowa s jest narysowana. Jeśli stożkowa określona jest pięcioma punktami, aby móc rozwiązać zadanie samą linijką, do konstrukcji wyznaczenia punktów wspólnych prostej k z tą stożkową należy użyć narysowanej stożkowej s_0. Pozostałe konstrukcje są liniowe.

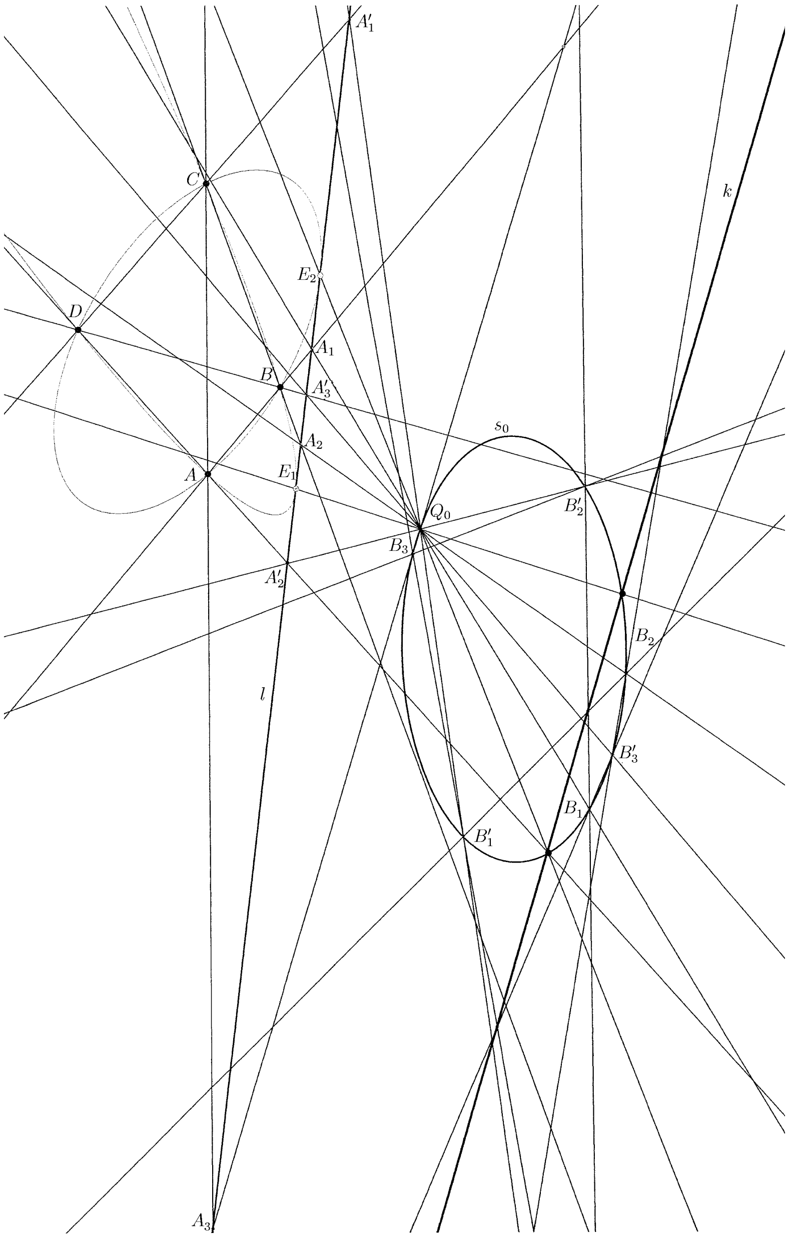
Zadanie 3

Dane są cztery punkty A, B, C, D, z których żadne trzy nie należą do jednej prostej, oraz prosta l nie przechodząca przez żaden z tych punktów. Wyznaczyć stożkowe przechodzące przez dane punkty i styczne do prostej l.

Rozwiązanie:

Z pierwszego twierdzenia Desarques'a wynika, że jeżeli czworokąt jest wpisany w stożkową, to dowolna prosta nie przechodząca przez żaden z wierzchołków tego czworokąta przecina stożkową w dwu punktach, sprzężonych z sobą w inwolucji, do której należą pary punktów przecięcia tej prostej z trzema parami boków przeciwległych czworokąta. Na rysunku 7 parami punktów sprzężonych w inwolucji o prostej l są: (A_1, A_1'), (A_2, A_2'), (A_3, A_3'), Punkty podwójne tej inwolucji (o ile istnieją) są punktami styczności stożkowych przechodzących przez punkty A, B, C, D z prostą l. Wyznaczono je za pomocą stożkowej s_0 tak, jak w zadaniu 1.

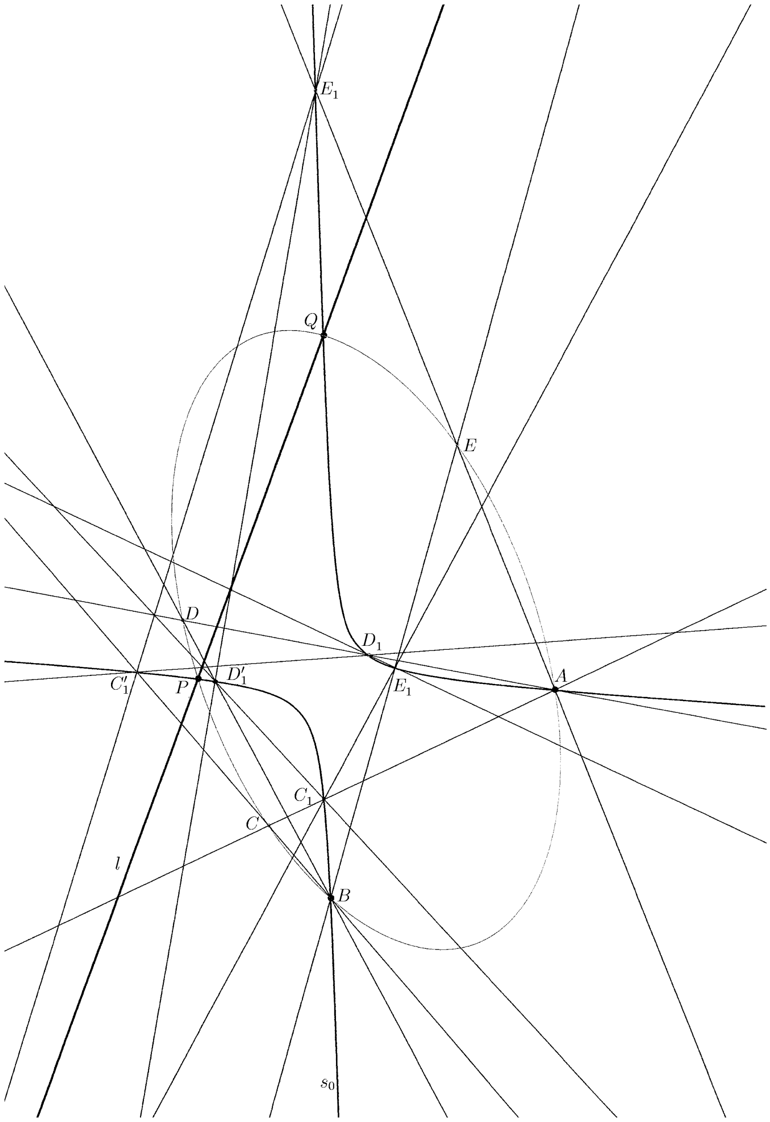
Zwróćmy jeszcze uwagę na konstrukcję punktów wspólnych dwu stożkowych. W ogólnym przypadku wyznaczenie punktów wspólnych dwu stożkowych jednej płaszczyzny nie jest zadaniem stopnia drugiego i, jak wykazano, nie da się sprowadzić do zadań drugiego stopnia (dowodzi się analitycznie, że rozwiązanie takiego zadania prowadzi do pewnego równania nieprzywiedlnego stopnia czwartego).



Rysunek 7.

Można jednak do zadań stopnia drugiego (rozwiązalnych za pomocą samej linijki i narysowanej stałej stożkowej) sprowadzić zadanie wyznaczenia punktów wspólnych dwóch stożkowych, gdy dane są ich dwa elementy wspólne (dwa punkty wspólne albo jeden punkt wspólny i wspólna styczna w tym punkcie albo dwie styczne wspólne).

Przedstawimy tu tylko przypadek, gdy stożkowe mają dwa różne punkty wspólne; przy czym jedna jest narysowaną stożkową s_0, a druga stożkowa s jest określona pięcioma punktami A, B, C, D, E (rysunek 8).



Rysunek 8.

Rzutując punkty stożkowej s na stożkową s_0 z punktów A, B, otrzymamy na stożkowej s_0 pewne przekształcenie rzutowe:

$$s_0(C_1, D_1, E_1, \ldots) \overline{\wedge}\, s_0(C_1', D_1', E_1', \ldots).$$

Na rysunku 8 wyznaczono oś l tego przekształcenia rzutowego. Można wykazać, że punkty P, Q wspólne tej osi l ze stożkową s_0 (o ile istnieją) są również punktami stożkowej s.

Uwaga: W przypadku, gdy obie stożkowe są określone tylko swoimi pięcioma punktami, zadanie też można rozwiązać samą linijką. Wyznaczenie punktów przecięcia prostej ze stożkową jest konstrukcją liniową. Punkty przecięcia osi przekształcenia rzutowego ze stożkową s_0 (czy też s) wyznacza się liniowo za pomocą dodatkowo narysowanej stożkowej, jak w zadaniu 1.

W podanych zadaniach nie zachodziła potrzeba konstruowania na płaszczyźnie euklidesowej prostych równoległych i prostych prostopadłych. Do wykonania tych konstrukcji samą linijką nie wystarcza już narysowana dowolna stożkowa. Musi być uwzględniona prosta niewłaściwa płaszczyzny, którą można zadać przez dwa jej różne punkty (czyli kierunki na płaszczyźnie euklidesowej) oraz inwolucja bezwzględna płaszczyzny zadana przez dwie pary punktów sprzężonych, czyli przez dwie pary prostych prostopadłych.

Wobec tego, na płaszczyźnie euklidesowej uzupełnionej prostą niewłaściwą jako stałą stożkową s_0 wystarczy przyjąć okrąg z zaznaczonym środkiem. Wtedy prosta niewłaściwa płaszczyzny jest biegunową środka okręgu, a inwolucja bezwzględna jest inwolucją punktów sprzężonych względem okręgu na prostej niewłaściwej. Wówczas, jak to wynika z twierdzenia Ponceleta-Steinera, każda konstrukcja klasyczna płaszczyzny (tj. konstrukcja cyrklem i linijką) jest wykonalna samą linijką.

4. Inwersja względem okręgu jako konstrukcja liniowa

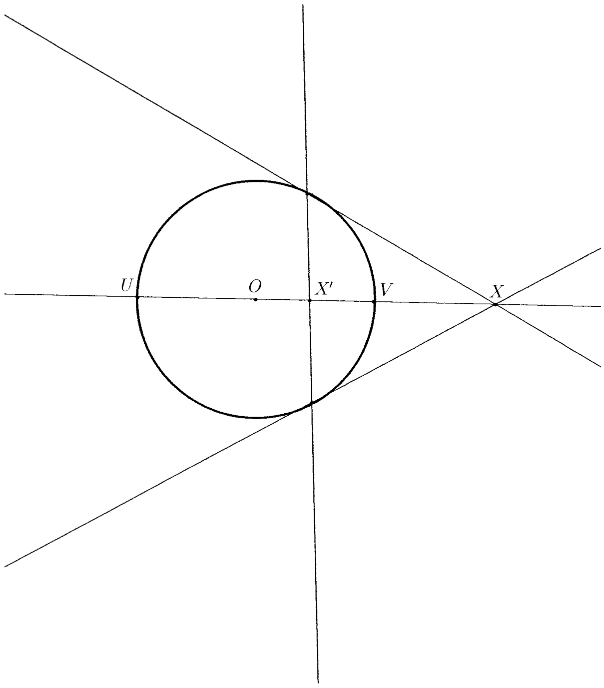
Na zakończenie pokażemy, że konstrukcja obrazu punktu w inwersji względem okręgu również może być konstrukcją liniową.

Niech okrąg o środku O i promieniu r będzie okręgiem inwersji, X punktem euklidesowym płaszczyzny nie należącym do tego okręgu i różnym od punktu O, a X' obrazem punktu X w inwersji względem tego okręgu (rysunek 9).

Z definicji inwersji względem okręgu wynika, że X' należy do półprostej OX i $|OX'| \cdot |OX| = r^2$.

Oznaczmy przez U, V punkty przecięcia prostej OX z okręgiem i wyznaczmy dwustosunek czwórki punktów $(UVXX')$. Ponieważ para punktów (UV) rozdziela parę (XX'), więc z definicji dwustosunku otrzymujemy:

$$(UVXX') = -\left(\frac{|UX|}{|VX|} : \frac{|UX'|}{|VX'|}\right).$$



Rysunek 9.

Rozważmy przypadek, gdy X należy do zewnętrza koła o środku O i promieniu r, a punkt V należy do półprostej UX. Uwzględniając założenie, że $|OX'| \cdot |OX| = r^2$, otrzymujemy:

$$(UVXX') = -\frac{(r + |OX|) \cdot (r - |OX'|)}{(|OX| - r) \cdot (|OX'| + r)} = -\frac{|OX| - |OX'|}{|OX| - |OX'|} = -1.$$

Gdy X jest punktem wnętrza koła, to:

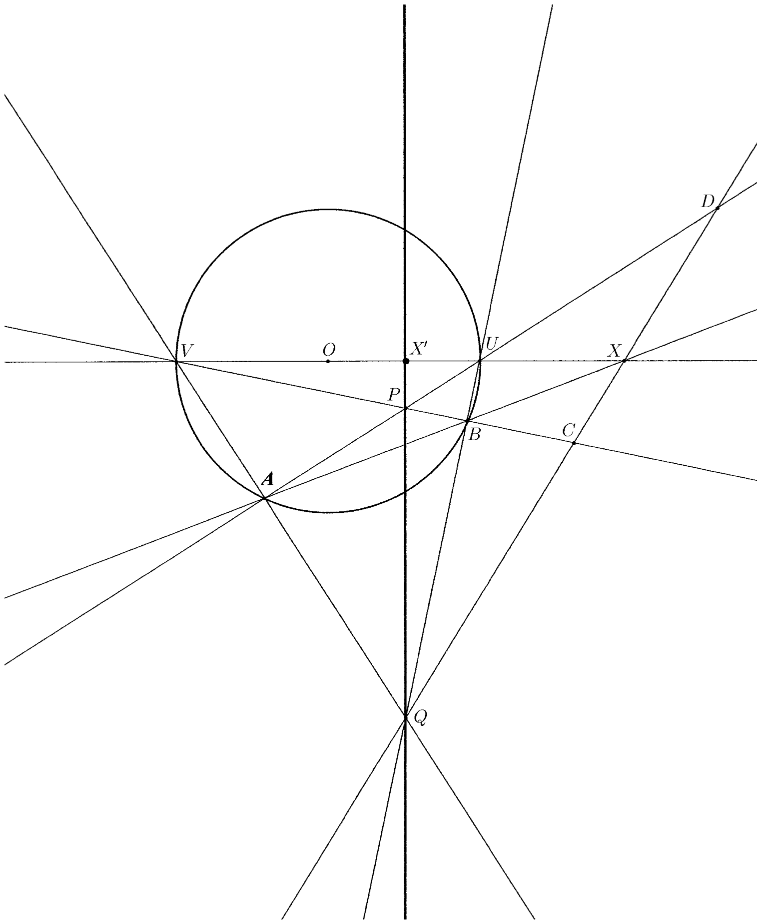
$$(UVXX') = -\frac{(r + |OX|) \cdot (|OX'| - r)}{(r - |OX|) \cdot (|OX'| + r)} = -\frac{|OX'| - |OX|}{|OX'| - |OX|} = -1.$$

W obydwu przypadkach X' jest czwartym harmonicznym punktem dla trójki punktów (UVX), a więc jest punktem przecięcia biegunowej punktu X z prostą OX.

Konstrukcja punktu czwartego harmonicznego dla trójki punktów współliniowych jest znaną konstrukcją liniową. Przypomnijmy ją jednak, opisując jednocześnie konstrukcję biegunowej danego punktu względem okręgu.

Przypadek 1°

Załóżmy, że X jest punktem euklidesowym należącym do zewnętrza koła o środku O (X należy do płaszczyzny, w której zawiera się koło) (rysunek 10).



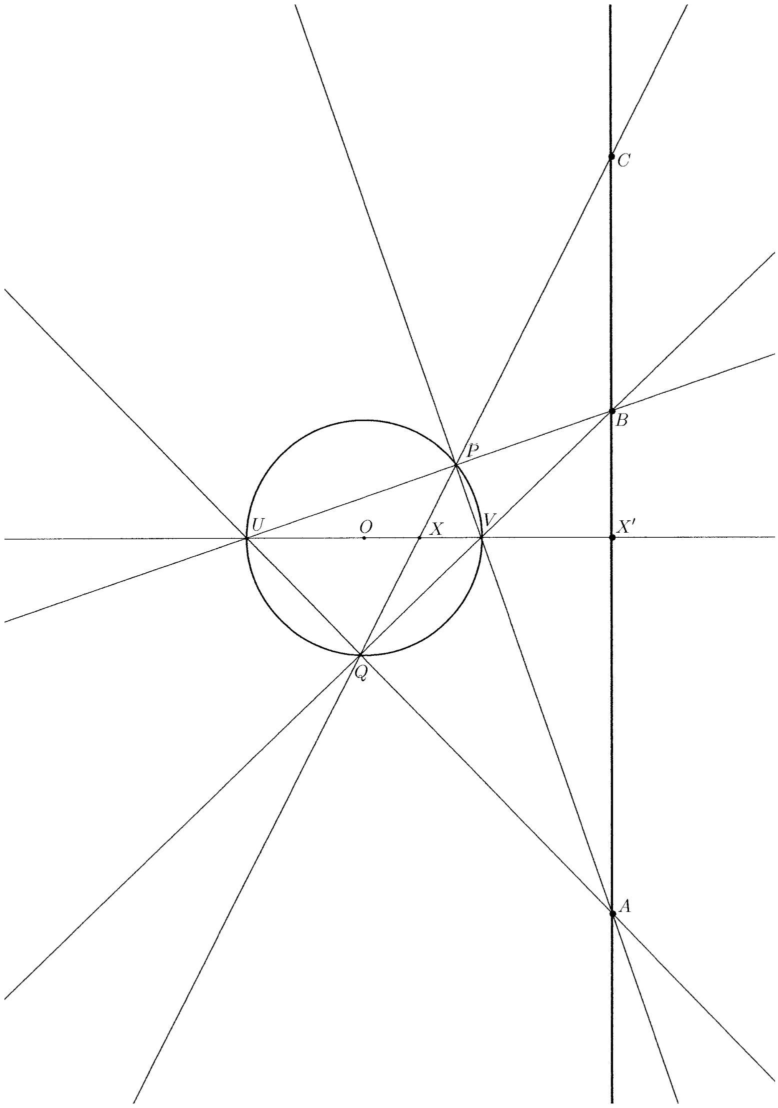
Rysunek 10.

Oznaczmy przez V, U punkty przecięcia prostej OX z okręgiem i poprowadźmy przez X prostą różną od OX, przecinającą okrąg w dwu różnych punktach A, B. Niech Q będzie punktem wspólnym prostych AV i BU. Dla czworokąta zupełnego $AQBP$ punkty U, V są punktami przekątnymi, prosta OX przekątną, a punkty X, X' punktami wspólnymi przekątnej OX z bokami AB i PQ.

Stąd i z definicji relacji rozdzielania harmonicznego, para punktów (UV) rozdziela harmonicznie parę (XX'). Punkt X' jest więc czwartym harmonicznym dla trójki punktów (UVX), a tym samym jest obrazem punktu X w inwersji względem danego okręgu. Równocześnie $ABUV$ jest czworokątem zupełnym wpisanym w okrąg, więc prosta QX' jest biegunową punktu X względem tego okręgu.

Przypadek 2°

Punkt X należy do wnętrza koła o środku O i promieniu r ($X \neq O$) (rysunek 11).



Rysunek 11.

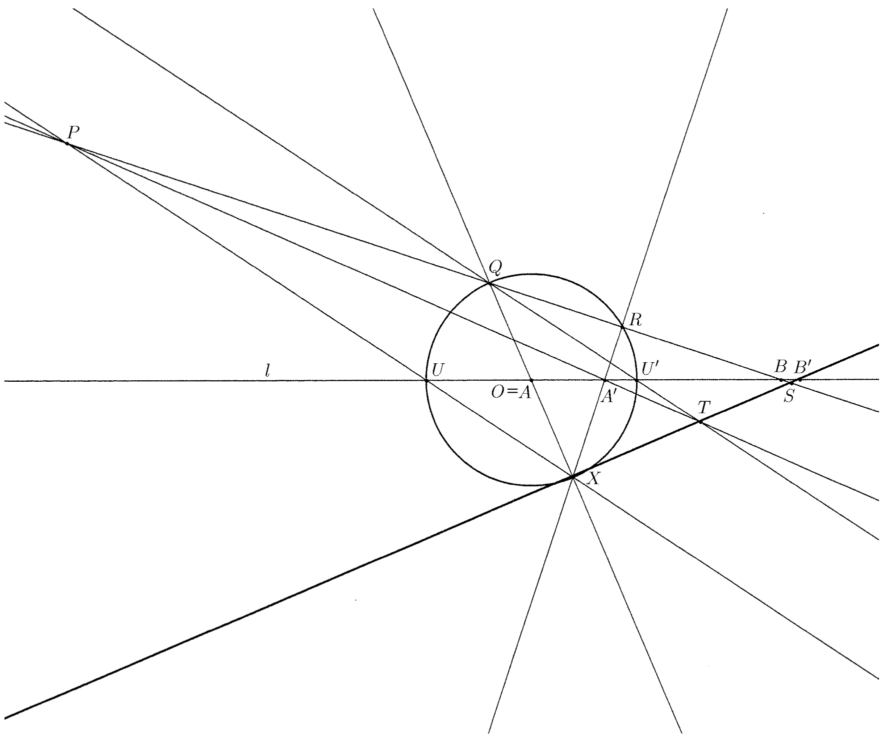
Niech prosta OX przecina okrąg w punktach U, V. Poprowadźmy przez punkt X prostą różną od OX i przecinającą okrąg w punktach P, Q. Punkty

P, V, Q, U są wierzchołkami czworokąta zupełnego wpisanego w ten okrąg. Zaznaczone na rysunku 11 punkty A, B i punkt X są punktami przekątnymi tego czworokąta. Prosta AB jest przekątną czworokąta $PVQU$. Niech C będzie punktem wspólnym przekątnej AB z bokiem PQ czworokąta, a X' punktem wspólnym prostej AB i boku UV tego czworokąta. Wówczas para punktów (AB) rozdziela harmonicznie parę (CX'). Rzutując czwórkę punktów $(ABCX')$ na prostą OX z punktu P i korzystając z tego, że relacja rozdzielania harmonicznego jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych, wnioskujemy, że para punktów (UV) rozdziela harmonicznie parę (XX'), a to dowodzi, że X' jest obrazem punktu X w inwersji względem danego okręgu. Biegunową punktu X względem okręgu jest tu prosta AB.

Przypadek 3°

Punkt X należy do okręgu (rysunek 12). Wtedy, jak wiadomo, X jest punktem stałym w inwersji względem tego okręgu, czyli $X' = X$.

Pokażemy jednak, jak, używając samej linijki, skonstruować styczną do tego okręgu w punkcie X (czyli biegunową punktu Xwzględem okręgu).



Rysunek 12.

Niech Q, R będą różnymi od siebie i od X punktami okręgu. Q, X, R są więc wierzchołkami trójkąta zupełnego wpisanego w ten okrąg. Niech l będzie dowolną prostą przecinającą okrąg w punktach U, U', lecz nie przechodzącą przez żaden z punktów Q, X, R (na rysunku 12 poprowadzono ją przez punkt O). Oznaczając przez A, A' punkty przecięcia prostej l odpowiednio z prostymi QX i RX przez B punkt wspólny prostych l i QR, a przez B' punkt, w którym prosta t styczna do okręgu w punkcie X przecina prostą l, z drugiego twierdzenia Desarques'a dotyczącego stożkowych wnioskujemy, że pary punktów: (AA'), (UU') i (BB') należą do pewnej inwolucji na prostej l. Aby więc skonstruować prostą t, wystarczy skonstruować obraz punktu B w inwolucyjnym przekształceniu rzutowym na prostej l, jednoznacznie wyznaczonym przez pary punktów: (AA') i (UU').

Oznaczmy przez P punkt wspólny prostych UX i QR, przez T punkt wspólny prostych PA' i QU'. Można wówczas wykazać, że punkt wspólny prostej TX z prostą l, który na rysunku oznaczono przez B', jest obrazem punktu B w zadanym przekształceniu inwolucyjnym na prostej l, natomiast prosta TX jest styczną do okręgu w punkcie X.

Rzutując kolejno prostą l na prostą PQ z punktu T, a następnie prostą PQ na prostą l z punktu X, otrzymujemy:

$$(A', U', B', B, \ldots) \overline{\wedge} (P, Q, S, B, \ldots) \overline{\wedge} (U, A, B', B, \ldots) \overline{\wedge} (A, U, B, B', \ldots).$$

Czyli

$$(A', U', B', B, \ldots) \overline{\wedge} (A, U, B, B', \ldots)$$

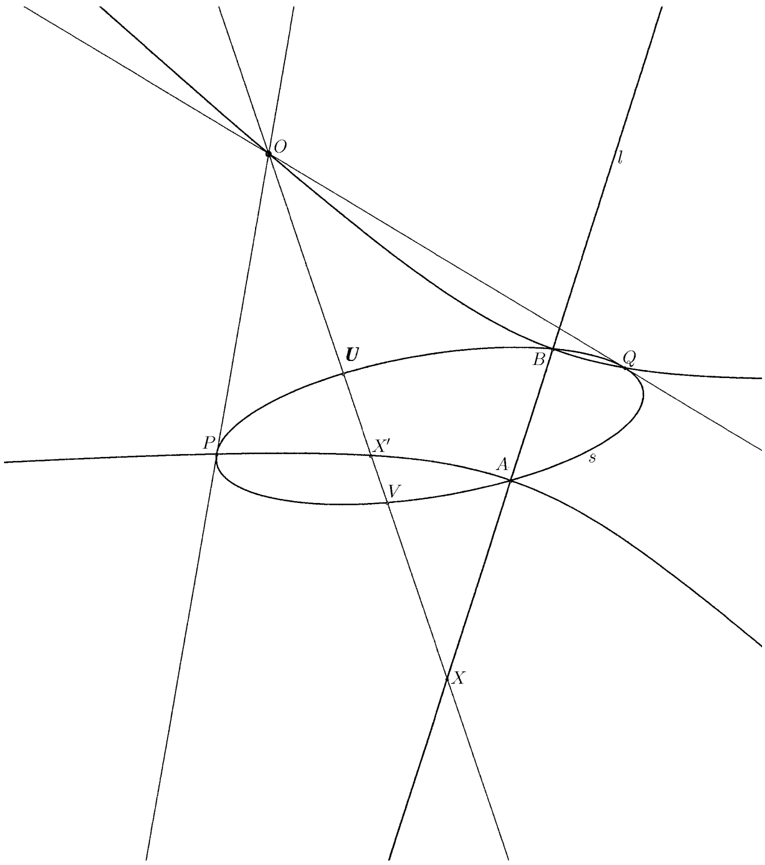
Ponieważ w podanym przekształceniu rzutowym prostej l obrazem punktu B jest różny od niego punkt B', a obrazem punktu B' punkt B, więc analogiczną własność ma każda para odpowiadających sobie punktów (w szczególności pary (AA') i (UU')), a to dowodzi, że to przekształcenie rzutowe jest inwolucją. Tym samym, w myśl drugiego twierdzenia Desarques'a, prosta XB' jest styczną do okręgu w punkcie X.

Podane powyżej konstrukcje biegunowych punktów względem okręgów można stosować również w przypadku dowolnych stożkowych. Co więcej, można uogólnić pojęcie inwersji względem okręgu na inwersję względem dowolnej stożkowej.

Przekształcenie takie nosi nazwę przekształcenia Hirsta (Wieleitner, 1919). Jego definicja jest następująca:

Definicja

Na płaszczyźnie rzutowej dana jest pewna stożkowa s i dowolny punkt O nie należący do s (rysunek 13). Niech X będzie punktem płaszczyzny różnym od punktu O, punkty U, V punktami wspólnymi prostej OX i stożkowej s (mogą się pokrywać lub być punktami urojonymi sprzężonymi). Obrazem punktu X w przekształceniu Hirsta jest taki punkt X', że para (UV) rozdziela harmonicznie parę (XX'), czyli $(UVXX') = -1$.



Rysunek 13.

Wynika stąd, że przekształcenie Hirsta jest inwolucją i podobnie jak inwersja względem okręgu na płaszczyźnie euklidesowej jest przekształceniem kwadratowym. Można bowiem wykazać, że obrazem prostej l nie przechodzącej przez punkt O jest stożkowa przechodząca przez O, przez punkty wspólne prostej l i stożkowej s, oraz przez punkty styczności (rzeczywiste lub urojone) prostych pęku (O) stycznych do stożkowej, z tą stożkową.

Podobnie można wykazać, że każde przekształcenie płaszczyzny lub przestrzeni euklidesowej jest specyficznym przekształceniem rzutowym. Uzyskuje się w ten sposób zupełnie inne spojrzenie na geometrię euklidesową. Twierdzenia elementarnej geometrii euklidesowej stają się wtedy szczególnymi przypadkami twierdzeń geometrii rzutowej. Zresztą nie tylko geometria euklidesowa znajduje swoje miejsce w geometrii rzutowej. W ujęciu rzutowym bardziej zrozumiałym staje się na przykład model Beltramiego-Kleina płaszczyzny Łobaczewskiego. Rolę okręgu w tym modelu może pełnić dowolna stożkowa.

5. Uwagi końcowe

W artykule tym przedstawiono jedynie niewielki zakres zastosowań teorii geometrii rzutowej. Starano się przy tym zwrócić uwagę na to, że ten sam problem geometryczny (w tym przypadku zadania konstrukcyjne) może być rozwiązywany różnymi sposobami w zależności od środków, którymi się dysponuje. Dodatkowym celem tego opracowania było wzbudzenie zainteresowań czytelnika możliwościami zastosowań i interpretacji geometrii rzutowej.

Objaśnienie symboli matematycznych stosowanych w pracy:

A, B, C, ... — punkty euklidesowe,
k, l, m, ... — proste euklidesowe,
(A) — pęk prostych płaszczyzny przechodzących przez punkt A,
AB — prosta wyznaczona przez dwa różne punkty A, B,
$|AB|$ — odległość euklidesowa punktów A, B,
$(ABCD)$ — dwustosunek czwórki punktów współliniowych A, B, C, D,
$(A_1, A_2, A_3, \ldots) \overline{\wedge} (B_1, B_2, B_3, \ldots)$ — przekształcenie rzutowe, w którym dla dowolnego i obrazem punktu A_i jest punkt B_i.

Literatura

Четверухин, Н. Ф.: 1969, *Проективная геометрия*, Издательство Просвещение, Москва.

Fudali, S.: 1989, *Geometria*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.

Комиссарук, А. М.: 1971, *Проективная геометрия в задачах*, Вышейшая школа, Минск.

Pedoe, D.: 1963, *An Introduction to Projective Geometry*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris.

Wieleitner, H.: 1919, *Algebraische Kurven. Teil I, II*, Walter de Gruyter & Co, Berlin.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków