FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.7

Marcin Zieliński

O ilości nierównoważnych metryk*

Abstract. It is well known that there exist many metrics on a non-empty set. In the case of (X, ϱ) − a finite metric set, it can be easily shown that all the metrics on X are equivalent. This paper examines the number of non-equivalent metrics on uncountably infinite sets.

Wstęp

W mojej niepublikowanej dotąd pracy licencjackiej zajmowałem się ilością metryk nierównoważnych. Studenci z pojęciem metryki spotykają się zwykle podczas kursu wstępu do topologii, poznają definicje metryki i kilka przykładów metryk określonych na różnych zbiorach, najczęściej na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^2$, takich na przykład jak metryka naturalna[1], dyskretna czy metryka rzeka. W tym kontekście rodzi się pytanie o ilość nierównoważnych metryk określonych na danym zbiorze X. Łatwo sprawdzić, że w dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ϱ), gdy X jest zbiorem skończonym tylko ciągi prawie stałe są zbieżne, więc każde dwie metryki określone na X są równoważne. W mojej wyżej wspomnianej pracy wykazałem, że gdy X jest zbiorem nieskończonym przeliczalnym lub zbiorem mocy continuum, istnieje $2^{|X|}$ metryk, które nie są równoważne. Na koniec postawiłem hipotezę:

> ,,Jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną, a X zbiorem nieskończonym, to zbiór wszystkich metryk nierównoważnych określonych na zbiorze X jest równoliczny ze zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X''.

*On non-equivalent metrics on a uncountable set

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 54E35; Secondary: 03E10

Key words and phrases: nonequivalent metrics, metrizability, metric spaces

[1] Wiadomo, że na zbiorze można wprowadzić wiele metryk. Tak zwana metryka naturalna na $\mathbb{R}$, to metryka porządkowa (metryka wprowadzająca taką topologię na zbiorze liniowo uporządkowanym, że bazą tej topologii są przedziały otwarte) zadana przez naturalny porządek. Pokazuje się, że istnieje dokładnie jeden porządek zgodny z działaniami w ciele liczb rzeczywistych i właśnie ten porządek jest nazywany ,,naturalnym'' (zob. Błaszczyk, 2007, s. 148; Błaszczyk, 2012). W artykule koncentrujemy się na mocy zbiorów, a nie na ich strukturze algebraicznej czy porządkowej, co nie zmienia wyróżnionego znaczenia tej metryki.

W tym artykule udowodnię prawdziwość tej hipotezy[2] dla zbiorów o mocy nie mniejszej niż continuum. W tym celu najpierw zdefiniuję pewien zbiór M, a następnie kolejno trzy metryki $d, d_1, \hat{\varrho}_A$ określone na tym zbiorze. Dalej wykażę spójność przestrzeni metrycznej (M, d_1). Spójność tej przestrzeni jest kluczową własnością w dowodzie twierdzenia 3, dającego warunek konieczny i wystarczający, aby dwie metryki typu $\hat{\varrho}_A, \hat{\varrho}_B$ nie były równoważne. Korzystając z tego twierdzenia i z faktu, że konstrukcja zbioru M umożliwia by był on dowolnej mocy nie mniejszej niż continuum, sformułuję i udowodnię twierdzenie o ilości metryk, które nie są równoważne.

1. Definicje

Przypomnijmy dwie definicje:

Definicja 1
Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję

$$\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazywamy metryką w zbiorze X, gdy spełnia następujące warunki:

(M1) $\forall x, y \in X \quad (\varrho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$,

(M2) $\forall x, y \in X \quad \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$,

(M3) $\forall x, y, z \in X \quad \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ (nierówność trójkąta).

Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną.
Podstawiając $x = y = z$ w (M3) i korzystając z (M2) widzimy, że metryka przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Definicja 2
Niech w przestrzeni X określone będą dwie metryki ϱ_1 i ϱ_2. Mówimy, że są one równoważne jeżeli, dyktują tę samą zbieżność, tzn. dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X$ i dowolnego $q \in X$ prawdziwa jest równoważność[3]

$$\varrho_1(x_n, q) \to 0 \Longleftrightarrow \varrho_2(x_n, q) \to 0, \tag{1}$$

[2] Podobny wynik jak ten prezentowany w tym artykule, innymi metodami i niezależnie od Autora tego artykułu w 2016 roku, uzyskał Eric Wofsey. Przedstawił szkic dowodu, że (niezależnie od hipotezy continuum) w zbiorze nieskończonym X jest dokładnie $2^{|X|}$ nierównoważnych metryk (zob. Wofsey, 2016). Niech S będzie dowolnym zbiorem nieskończonym i niech $T \subset S$. Pomysł Wofseya polega na tym, by na iloczynie kartezjańskim $S \times \{\mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$, wprowadzić metrykę taką, że ciąg $x_n = (s_0, n)$ jest zbieżny do (s_0, ∞) wtedy i tylko wtedy gdy $s_0 \in T$. Dla każdych dwóch różnych zbiorów T otrzymujemy nierównoważne metryki, czyli $2^{|S|}$ nierównoważnych metryk. Ponieważ $|S| = |S \times \{\mathbb{N} \cup \{\infty\}\}|$, to istnieje bijekcja pomiędzy zbiorami, więc dla każdego $T \subset S$ otrzymujemy nierównoważne metryki na S. Szkic ten wymaga wielu uzupełnień, zwłaszcza wykazania, że metryka o takich własnościach istnieje, co może być ciekawym ćwiczeniem dla studentów zainteresowanych zagadnieniami przestrzeni metrycznych.

[3] Definicja w powyższej formie pochodzi z książki Krzyszkowski, Turdza (2005). W artykule w celu wykazania, że dwie metryki nie są równoważne będziemy korzystali z zaprzeczenia warunku (2) czyli, że istnieje ciąg zbieżny do granicy q w jednej metryce podczas gdy w drugiej metryce nie jest on zbieżny do tej granicy.

co możemy zapisać inaczej

$$x_n \overset{\varrho_1}{\to} q \Longleftrightarrow x_n \overset{\varrho_2}{\to} q. \tag{2}$$

Zdefiniujmy zbiór:

$$M := \{(a, b) : a \in Y \wedge\ b \in \mathbb{R}_+\} \ \cup\ \{(0, 0)\},^4 \tag{3}$$

gdzie Y jest dowolnym niepustym zbiorem nie zawierającym 0, czyli $0 \notin Y \neq \emptyset$, lub równoważnie:

$$M := Y \times \mathbb{R}_+ \cup \{(0, 0)\}. \tag{4}$$

Wyznaczmy moc zbioru M. Korzystając z (4), oraz faktu, że $Y \neq \emptyset$, oraz $\mathbb{R}_+$ jest zbiorem nieskończonym, mamy $|M| = |Y| \cdot |\mathbb{R}_+| + |\{(0, 0)\}| = |Y| \cdot \mathfrak{c}$. Zauważmy, że ponieważ $|M| = |Y| \cdot \mathfrak{c}$, moc zbioru M jest nie mniejsza niż continuum, co zapiszemy

$$|M| \geqslant \mathfrak{c}, \tag{5}$$

a dokładniej

$$|M| = \mathfrak{c}, \quad \text{gdy } |Y| < \mathfrak{c} \ \text{ lub } |M| = |Y| \ \text{ gdy } |Y| \geqslant \mathfrak{c}. \tag{6}$$

Zdefiniujmy funkcję: $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} |b_2 - b_1|, & \text{gdy } \ a_1 = a_2 \\ b_2 + b_1, & \text{gdy } \ a_1 \neq a_2, \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $x = (a_1, b_1) \in M,\ y = (a_2, b_2) \in M$. Wykażemy, że funkcja d jest metryką określoną na zbiorze M.
Warunki (M1) i (M2) są w oczywisty sposób spełnione. Udowodnimy nierówność trójkąta.
Niech $x = (a_1, b_1),\ y = (a_2, b_2),\ z = (a_3, b_3)$.
Przeanalizujmy przypadki pamiętając, że $b_1, b_2, b_3 \geq 0$:

1. $a_1 = a_2 = a_3$, wtedy

   $$d(x, y) = |b_2 - b_1| \leqslant |b_3 - b_1| + |b_2 - b_3| = d(x, z) + d(z, y).$$

2. $a_1 = a_2 \neq a_3$, wtedy

   $$d(x, y) = |b_2 - b_1| \leqslant b_2 + b_1 \leqslant b_1 + b_3 + b_3 + b_2 = d(x, z) + d(z, y).$$

3. $a_1 \neq a_2,\ a_1 = a_3$, wtedy[5]

   jeżeli $b_1 \leqslant b_3$, to $d(x, y) = b_2 + b_1 \leqslant b_2 + b_3 \leqslant |b_3 - b_1| + b_3 + b_2 = d(x, z) + d(z, y)$

   lub jeżeli $b_1 \geqslant b_3$, to $d(x, y) = b_2 + b_1 = b_1 - b_3 + b_3 + b_2 = |b_3 - b_1| + b_3 + b_2 = d(x, z) + d(z, y)$.

[4] Pisząc $\mathbb{R}_+$ mamy na myśli odpowiedni podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jako ciała uporządkowanego, 0 to element neutralny dodawania tego ciała, natomiast Y jest zbiorem bez określonej struktury czy to porządkowej, czy topologicznej.

[5] Przypadek $a_1 \neq a_2,\ a_2 = a_3$ jest analogiczny.

4. $a_1 \neq a_2 \neq a_3,\ a_1 \neq a_3,$
   $d(x,y) = b_2 + b_1 \leqslant b_1 + b_3 + b_3 + b_2 = d(x,z) + d(z,y).$

Wykazaliśmy więc, że tak zdefiniowana funkcja d jest metryką na zbiorze M.

2. O ilości metryk nierównoważnych określonych na zbiorze mocy nie mniejszej niż $\mathfrak{c}$

Lemat 1
Przestrzeń (M,d) jest spójna.

Dowód.
Niech $a \in Y$ będzie dowolnym ustalonym elementem zbioru Y.
$M_a := \{(a,b) \in M : b \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(0,0)\}$. Metryka d zawężona do zbioru M_a dana jest wzorem $d_{|M_a}(x,y) = |b_2 - b_1|$.
Zdefiniujmy funkcję f, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych z metryką naturalną, a przeciwdziedziną zbiór M_a z metryką $d_{|M_a}$. Funkcja dana jest wzorem $f : \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \ni b \longrightarrow (a,b) \in M_a$, gdzie a jest jak wyżej ustalonym elementem Y.
Zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych z metryką naturalną jest spójny, funkcja f jest ciągłą suriekcją, więc dla dowolnego $a \in Y$ zbiór M_a jest spójnym podzbiorem zbioru M. Zauważmy, że

$$M = \bigcup_{a \in Y} M_a \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{a \in Y} M_a = \{(0,0)\},$$

czyli zbiór M jest sumą zbiorów spójnych, których iloczyn jest niepusty, więc[6] jest zbiorem spójnym.

■

Zapiszmy i udowodnijmy przydatne twierdzenie[7].

Twierdzenie 1
Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną i niech funkcja $\varrho_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określona w następujący sposób:

$$\varrho_1(x,y) := \frac{\varrho(x,y)}{1 + \varrho(x,y)}.$$

Wtedy

1. Funkcja ϱ_1 jest metryką
2. Metryki ϱ i ϱ_1 są równoważne.

[6] Korzystamy tu z twierdzenia, że suma zbiorów spójnych, których iloczyn jest niepusty jest zbiorem spójnym (Zob. Engelking, Sieklucki, 1986, s. 64).
[7] Dowód z niewielkimi modyfikacjami pochodzi z pracy licencjackiej (Zieliński, 2016).

Dowód.

1. Pokażemy, że ϱ_1 jest metryką.

Ad (M1) Z faktu, że ϱ jest metryką mamy $\varrho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$, zatem

$$\varrho_1(x,y)=\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}=0 \Longleftrightarrow \varrho(x,y)=0.$$

Ad (M2) Korzystając z tego, że $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$, możemy zapisać:

$$\varrho_1(x,y)=\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}=\frac{\varrho(y,x)}{1+\varrho(y,x)}=\varrho_1(y,x).$$

Ad (M3) Zdefiniujmy funkcję pomocniczą $f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(w):=\frac{w}{1+w}.$$

Widać, że $\varrho_1(x,y)=f(\varrho(x,y))$. Zauważmy ponadto, że ponieważ funkcja f jest rosnąca dla argumentów nieujemnych, oraz $0\leqslant\varrho(x,y)\leqslant\varrho(x,z)+\varrho(z,y)$ dla dowolnych $x,y,z\in X$ (ponieważ ϱ jest metryką), to

$$\varrho_1(x,y)=f(\varrho(x,y))\leqslant f(\varrho(x,z)+\varrho(z,y))=\frac{\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}=$$

$$\frac{\varrho(x,z)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}+\frac{\varrho(z,y)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}\leqslant$$

$$\frac{\varrho(x,z)}{1+\varrho(x,z)}+\frac{\varrho(z,y)}{1+\varrho(z,y)}=\varrho_1(x,z)+\varrho_1(z,y).$$

Tym samym pokazaliśmy, że $\varrho_1(x,y)\leqslant\varrho_1(x,z)+\varrho_1(z,y)$, co kończy dowód ostatniego warunku.

2. Pokażemy, że metryki ϱ i ϱ_1 są równoważne.

Udowodnimy, że dla dowolnego ciągu $(x_n)\subset X$ i dowolnego $q\in X$ prawdziwa jest równoważność:

$$\varrho(x_n,q)\to 0 \Longleftrightarrow \varrho_1(x_n,q)\to 0,$$

co możemy zapisać

$$\varrho(x_n,q)\to 0 \Longleftrightarrow \frac{\varrho(x_n,q)}{1+\varrho(x_n,q)}\to 0,$$

co oznacza równoważność metryk ϱ i ϱ_1.

„$\Rightarrow$"

Prawdziwość tej implikacji jest oczywista.

„$\Leftarrow$”
Załóżmy, że $\dfrac{\varrho(x_n,q)}{1+\varrho(x_n,q)} \to 0$.

Przekształćmy wyrażenie

$$\frac{\varrho(x_n,q)}{1+\varrho(x_n,q)} = \frac{\varrho(x_n,q)+1-1}{1+\varrho(x_n,q)} = 1 - \frac{1}{1+\varrho(x_n,q)}.$$

Na podstawie założenia mamy: $1 - \dfrac{1}{1+\varrho(x_n,q)} \longrightarrow 0$, co pozwala nam kolejno zapisać[8]:
$\dfrac{1}{1+\varrho(x_n,q)} \longrightarrow 1$, stąd[9] $1+\varrho(x_n,q) \longrightarrow 1$ i ostatecznie[10] $\varrho(x_n,q) \longrightarrow 0$.

To kończy dowód równoważności metryk ϱ i ϱ_1.

$\blacksquare$

Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną, gdzie M jest zbiorem zdefiniowanym przez (3), a d metryką określoną w (7), wtedy na podstawie twierdzenia 1 funkcja

$$d_1(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \text{ gdzie } x,y \in M, \tag{8}$$

jest metryką określoną na zbiorze M. Dodatkowo z twierdzenia 1 wynika, że metryki d i d_1 są równoważne. Metryki równoważne generują tę samą topologię, więc na podstawie powyższego i lematu 1 możemy zapisać wniosek:

Wniosek 1
Przestrzeń metryczna (M,d_1) jest spójna.

Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną zdefiniowaną jak dotychczas i niech $A \subset M$. Zdefiniujmy jeszcze jedną metrykę na zbiorze M:

$$\hat{\varrho}_A(x,y) = \begin{cases} \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, & \text{gdy } x,y \in A \quad \text{lub} \quad x,y \in M \setminus A \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

[8] Nie możemy tu bezpośrednio zastosować tw. o granicy sumy, gdyż brak nam założenia o zbieżności $\frac{1}{1+\varrho(x_n,q)}$. Skorzystamy więc z lematu: $a + a_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow a_n \longrightarrow -a$. Schemat dowodu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a-a) =$ (na podst. tw o granicy sumy) $= \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a) - \lim\limits_{n\to\infty} a =$ (na podst. założenia) $= 0 - a = -a$ [Dowód powstał podczas prac seminaryjnych pod kierunkiem dr. Janusza Krzyszkowskiego.]

[9] Podobnie jak wyżej korzystamy z lematu: $\frac{a}{a_n} \longrightarrow a \Longrightarrow a_n \longrightarrow 1$, dla $a \neq 0$. Schemat dowodu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot \frac{a_n}{a}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot \frac{1}{\frac{a}{a_n}}) =$ (na podst. tw o granicy iloczynu i ilorazu) $= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{a_n}} =$ (na podst. założenia) $= \frac{a}{a} = 1$. [Dowód powstał podczas prac seminaryjnych pod kierunkiem dr. Janusza Krzyszkowskiego.]

[10] Należy skorzystać z lematu $a + a_n \longrightarrow a \Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$. Dowód analogiczny jak wyżej.

Możemy to zapisać równoważnie

$$\hat{\varrho}_A(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & \text{gdy } x,y \in A \quad \text{lub} \quad x,y \in M \setminus A \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{9}$$

Łatwo pokazać, że $\hat{\varrho}_A$ jest metryką. Ponownie warunki (M1),(M2) są oczywiste. W przypadku, gdy x, y, z należą do A lub do $M \setminus A$, to $\hat{\varrho}_A = d_1$, więc nierówność trójkąta (M3) jest spełniona. W pozostałych przypadkach wyrażenie stojące po lewej stronie nierówności trójkąta jest mniejsze lub równe 1, a po prawej stronie tej nierówności większe lub równe 1.

Udowodnimy teraz dwa lematy, które wykorzystamy w dalszej części artykułu. Zauważmy najpierw, że ponieważ

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq 1, \quad \text{to} \quad \hat{\varrho}_A(x,y) \geq d_1(x,y) \text{ dla każdego } x,y \in M.$$

Teraz możemy sformułować:

Lemat 2
Niech $A \subset M$ oraz $\hat{\varrho}_A$, d_1 będą określone jak powyżej. Wtedy prawdziwa jest implikacja

$$x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q \Rightarrow x_n \overset{d_1}{\to} q.$$

Dowód.
Ponieważ $d_1(x,y) \leq \hat{\varrho}_A(x,y)$ dla każdego $x,y \in M$, to możemy zapisać nierówności

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & d_1(x_n,q) & \leq & \hat{\varrho}_A(x_n,q) \\ \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

co pozwala nam wnioskować o tym, że $x_n \overset{d_1}{\to} q$.

■

Jeżeli $x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q$ i prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do zbioru A, to $q \in A$. Gdyby $q \notin A$, to mielibyśmy

$$\exists N \forall n > N \quad \hat{\varrho}_A(x_n,q) = 1,$$

co przeczyłoby temu, że $x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q$. Analogicznie jeżeli $x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q$ i prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do zbioru $M \setminus A$, to $q \in M \setminus A$, co w połączeniu z lematem 2 pozwala nam zapisać

Wniosek 2
Jeżeli w przestrzeni $(M, \hat{\varrho}_A)$ ciąg jest zbieżny do granicy q, to jest zbieżny w przestrzeni (M, d_1) i zachodzi jeden z poniższych warunków:

1. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do A.

2. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do $M \setminus A$.

LEMAT 3
Jeżeli ciąg jest zbieżny w przestrzeni (M, d_1) do granicy q i zachodzi jeden z poniższych warunków:

1. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do A.

2. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do $M \setminus A$,

   to jest on zbieżny do granicy q w przestrzeni $(M, \hat{\varrho}_A)$.

To możemy zapisać symbolicznie:

$$x_n \overset{d_1}{\to} q \ \wedge \ \exists N \Big(\forall n > N \ (x_n \in A \ \wedge \ q \in A) \vee \forall n > N \ (x_n \in M \setminus A \ \wedge \ q \in M \setminus A) \Big) \implies x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q.$$

DOWÓD.
Dowód przeprowadzimy dla pierwszego warunku alternatywy, dla drugiego warunku dowód jest analogiczny.

Ponieważ $x_n \overset{d_1}{\to} q$ i prawie wszystkie wyrazy ciągu ciągu (x_n) należą do A i $q \in A$, to

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \forall n > N_1 \ d_1(x_n, q) < \varepsilon \ \wedge \ \exists N_2 \ \forall n > N_2 \ x_n \in A \ \wedge \ q \in A.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech N_1 będzie ustalone z powyższego warunku do ε. Połóżmy $N := \max\{N_1, N_2\}$, wówczas

$$\forall n > N \ \hat{\varrho}_A(x_n, q) = d_1(x_n, q),$$

więc otrzymujemy

$$\exists N \forall n > N \ \hat{\varrho}_A(x_n, q) < \varepsilon,$$

zatem $x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q$.

■

Bezpośrednio z wniosku 2 i lematu 3 wynika

TWIERDZENIE 2 (WARUNEK KONIECZNY I WYSTARCZAJĄCY)
W przestrzeni $(M, \hat{\varrho}_A)$ ciąg jest zbieżny do granicy q wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w przestrzeni (M, d_1) i zachodzi jeden z poniższych warunków:

1. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do A.

2. Prawie wszystkie wyrazy ciągu i granica należą do $M \setminus A$.

To możemy zapisać symbolicznie:

$$x_n \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q \iff x_n \overset{d_1}{\to} q \ \wedge \ \exists N \Big(\forall n > N \ (x_n \in A \wedge \ q \in A) \vee \forall n > N (x_n \in M \setminus A \wedge q \in M \setminus A) \Big).$$

Twierdzenie 3 (O równoważności metryk $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$.)
Niech $A, B \subset M$ będą dowolnymi podzbiorami. Metryki $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy różnica symetryczna zbiorów A i B, to znaczy $S = A \dot{-} B$ jest zbiorem pustym lub jest M.

Dowód.
„$\Leftarrow$"
Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy $S = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.
Wtedy $A = B$. Zatem $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$ są równoważne.
Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $S = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = M$.
Mamy $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = M$, więc $A \cup B = M$ oraz $A \cap B = \emptyset$, zatem $A = M \setminus B$, stąd i na podstawie definicji (9) metryk $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$, metryki te są równoważne.
Pokazaliśmy, że jeśli $S = \emptyset$ lub $S = M$, to metryki $\hat{\varrho}_A, \hat{\varrho}_B$ są równoważne.

„$\Rightarrow$"
Dowód nie wprost. Załóżmy, że $S \neq \emptyset, S \neq M$ i $\hat{\varrho}_A, \hat{\varrho}_B$ są równoważne. Na podstawie wniosku 1 przestrzeń (M, d_1) jest spójna, więc z równości $M = S \cup (M \setminus S)$ i założenia $M \neq S \neq \emptyset$ wynika, że S lub $M \setminus S$ nie jest domknięty. Rozważmy najpierw przypadek: S nie jest domknięty. Wtedy

$$\exists (x_n) \subset S : \ x_n \xrightarrow{d_1} q \notin S$$

lub równoważnie

$$\exists (x_n) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A) : \ x_n \xrightarrow{d_1} q \in M \setminus S.$$

Skoro ciąg (x_n) zawiera się w $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, to istnieje (x_{l_n}) podciąg ciągu (x_n) taki, że

$$(x_{l_n}) \subset (A \setminus B) \vee (x_{l_n}) \subset (B \setminus A).$$

Ponieważ $q \in M \setminus S = (M \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B)$, to

$$q \in M \setminus (A \cup B) \vee q \in A \cap B.$$

Możliwe są więc cztery przypadki.
Przypadek pierwszy:

1. $x_{l_n} \xrightarrow{d_1} q$, $(x_{l_n}) \subset A \setminus B$, $q \in M \setminus (A \cup B)$. Możemy zauważyć, że

   (i) $(x_{l_n}) \subset M \setminus B$,

   (ii) $q \in M \setminus B$,

   (iii) $(x_{l_n}) \subset A$,

   (iv) $q \notin A$.

   Na podstawie (i), (ii) oraz faktu $x_{l_n} \xrightarrow{d_1} q$, korzystając z twierdzenia 2, możemy wnioskować, że

   $$x_{l_n} \xrightarrow{\hat{\varrho}_B} q.$$

Natomiast z (iii), (iv) wynika

$$x_{l_n} \overset{\hat{\varrho}_A}{\not\to} q,$$

co jest sprzeczne z założeniem o równoważności metryk $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$.
Przypadek drugi:

2. $x_{l_n} \overset{d_1}{\to} q$, $(x_{l_n}) \subset B \setminus A$, $q \in M \setminus (A \cup B)$.
   Możemy zauważyć, że
   (i) $(x_{l_n}) \subset M \setminus A$,
   (ii) $q \in M \setminus A$,
   (iii) $(x_{l_n}) \subset B$,
   (iv) $q \notin B$.

   Na podstawie (i), (ii) oraz faktu $x_{l_n} \overset{d_1}{\to} q$, korzystając z twierdzenia 2, możemy wnioskować, że
   $$x_{l_n} \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q.$$
   Natomiast z (iii), (iv) wynika
   $$x_{l_n} \overset{\hat{\varrho}_B}{\not\to} q.$$
   Sprzeczność.
   Przypadek trzeci:

3. $x_{l_n} \overset{d_1}{\to} q$, $(x_{l_n}) \subset A \setminus B$, $q \in (A \cap B)$. Możemy zauważyć, że
   (i) $(x_{l_n}) \subset M \setminus B$,
   (ii) $q \in B$,
   (iii) $(x_{l_n}) \subset A$,
   (iv) $q \in A$.

   Na podstawie (i), (ii) oraz faktu $x_{l_n} \overset{d_1}{\to} q$, korzystając z twierdzenia 2, możemy wnioskować, że
   $$x_{l_n} \overset{\hat{\varrho}_B}{\not\to} q.$$
   Natomiast z (iii), (iv) wynika
   $$x_{l_n} \overset{\hat{\varrho}_A}{\to} q.$$
   Sprzeczność.
   Przypadek czwarty:

4. $x_{l_n} \overset{d_1}{\to} q$, $(x_{l_n}) \subset B \setminus A$, $q \in (A \cap B)$. Możemy zauważyć, że
   (i) $(x_{l_n}) \subset M \setminus A$,
   (ii) $q \in A$,
   (iii) $(x_{l_n}) \subset B$,

(iv) $q \in B$.

Na podstawie (i), (ii) oraz faktu $x_{l_n} \stackrel{d_1}{\to} q$, korzystając z twierdzenia 2, możemy wnioskować, że

$$x_{l_n} \stackrel{\hat{\varrho}_A}{\not\to} q.$$

Natomiast z (iii), (iv) wynika

$$x_{l_n} \stackrel{\hat{\varrho}_B}{\to} q.$$

Sprzeczność.

Pokazaliśmy, że gdy S nie jest zbiorem domkniętym, to w każdym z czterech możliwych przypadków metryki $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$ nie są równoważne, bo istnieje ciąg, który w jednej z metryk jest, a w drugiej nie jest zbieżny.
W podobny sposób można wykazać, że gdy $M \setminus S$ nie jest domknięty, to metryki $\hat{\varrho}_A$ i $\hat{\varrho}_B$ nie są równoważne.

■

Rozpatrzmy metryki typu $\hat{\varrho}_A$ i oznaczmy przez $\mathcal{P}(M)$ zbiór potęgowy zbioru M. Z dowodu twierdzenia 3 wynika

Wniosek 3
Dla dowolnych $A, B \subset M$ takich, że $A \neq B$, metryki $\hat{\varrho}_A, \hat{\varrho}_B$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $B = M \setminus A$.

Twierdzenie 4
Istnieje $2^{|M|}$ metryk $\hat{\varrho}_A$ które nie są równoważne.

Dowód.
Łatwo zauważyć, że istnieje rozbicie zbioru potęgowego $\mathcal{P}(M)$ na dwa zbiory $P_1, P_2 \subset \mathcal{P}(M)$ takie, że

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \ \wedge \ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

i spełniających warunek[11], że dla każdego $A \in \mathcal{P}(M)$ jeśli A należy do $\mathcal{P}_1$, to dopełnienie A należy do $\mathcal{P}_2$ i na odwrót, czyli

$$\forall A \in \mathcal{P}(M)\ A \in \mathcal{P}_1 \iff M \setminus A \in \mathcal{P}_2.$$

Istnieje naturalna bijekcja między $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2 : \mathcal{P}_1 \ni A \longrightarrow M \setminus A \in \mathcal{P}_2$, więc zbiory $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ są równoliczne, a ponieważ $|\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ i $|\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2|$, to $|\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2| = 2^{|M|}$.
Jeśli zbiór $A \in \mathcal{P}_1$, to jego dopełnienie $M \setminus A \notin \mathcal{P}_1$, więc na podstawie wniosku 3

$$\forall A, B \in \mathcal{P}_1 \text{ metryki } \hat{\varrho}_A, \hat{\varrho}_B \text{ nie są równoważne.}$$

Ostatecznie zbiór nierównoważnych metryk typu $\hat{\varrho}_A$ ma moc taką jak zbiór $\mathcal{P}_1$, czyli $2^{|M|}$, co kończy dowód. ■

[11] Przykład warunku prowadzącego do takiego rozbicia: $A \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow (0,0) \in A$.

Zauważmy jeszcze, że w dowodzie twierdzenia 4 nie korzystaliśmy z założenia o prawdziwości lub fałszywości hipotezy continuum.
Na podstawie twierdzenia 4 możemy sformułować wniosek:

Wniosek 4
W zbiorze M istnieje co najmniej $2^{|M|}$ metryk, które nie są równoważne.

Udowodnimy teraz lemat, który da nam ograniczenie górne na moc zbioru metryk nierównoważnych.

Lemat 4
W zbiorze M istnieje co najwyżej $2^{|M|}$ metryk, które nie są równoważne.

Dowód.
Każda metryka określona na M jest funkcją:

$$M \times M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Oczywiście nie każda taka funkcja jest metryką. Korzystając z faktu, że moc M jest nie mniejsza niż continuum (5), możemy zapisać, że takich funkcji jest tyle co:

$$|\mathbb{R}^{M \times M}| = |\mathbb{R}|^{|M \times M|} = \mathfrak{c}^{|M| \cdot |M|} = \mathfrak{c}^{|M|} = 2^{|M|},$$

stąd w szczególności istnieje co najwyżej $2^{|M|}$ metryk określonych na M, które nie są równoważne.

■

Prostą konsekwencją wniosku 4 i lematu 4 jest twierdzenie 5.

Twierdzenie 5
W zbiorze M istnieje dokładnie $2^{|M|}$ metryk, które nie są równoważne.

Aby dokonać uogólnienia twierdzenia 5 na dowolny zbiór mocy co najmniej continuum, zapiszmy teraz potrzebne twierdzenie.

Twierdzenie 6
Jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną, funkcja f iniekcją (zanurzeniem) zbioru Y w zbiór X, to funkcja

$$\bar{\varrho} : \; Y \times Y \ni (y_1, y_2) \longrightarrow \bar{\varrho}(y_1, y_2) := \varrho(f(y_1), f(y_2)) \in \mathbb{R}$$

jest metryką[12] w zbiorze Y.

Lemat 5
Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną, a funkcja f jest zaś bijekcją $Y \longrightarrow X$. W przestrzeni Y określmy metrykę $\bar{\varrho}(y_1, y_2) := \varrho(f(y_1), f(y_2))$. Wtedy dla dowolnego ciągu x_n prawdziwa jest równoważność[13]

$$x_n \overset{\varrho}{\to} q \iff f^{-1}(x_n) \overset{\bar{\varrho}}{\to} f^{-1}(q).$$

[12] Łatwy dowód tego twierdzenia znajduje się w (Malec, 2000, s. 14).
[13] Lemat wraz z dowodem pochodzi z pracy licencjackiej (Zieliński, 2016).

Dowód.
Wystarczy skorzystać z faktu, że

$$\varrho(x_n, q) = \varrho\Big(f(f^{-1}(x_n)), f(f^{-1}(q))\Big) = \bar{\varrho}\Big((f^{-1}(x_n), f^{-1}(q)\Big).$$

■

Bezpośrednio z lematu wynika

Twierdzenie 7
Niech $(X, \varrho_1), (X, \varrho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi a funkcja f bijekcją $Y \longrightarrow X$. Określmy dodatkowo na zborze Y metrykę $\bar{\varrho_1}(y_1, y_2) := \varrho_1(f(y_1), f(y_2))$ oraz metrykę $\bar{\varrho_2}(y_1, y_2) := \varrho_2(f(y_1), f(y_2))$. Wtedy[14]

Metryki $\bar{\varrho_1}, \bar{\varrho_2}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy metryki ϱ_1, ϱ_2 są równoważne.

Twierdzenie 8
(O ilości nierównoważnych metryk w zbiorze mocy nie mniejszej niż $\mathfrak{c}$)
Istnieje dokładnie $2^{|X|}$ nie równoważnych metryk określonych na zbiorze X mocy nie mniejszej niż continuum.

Dowód.
Niech $|X| \geqslant \mathfrak{c}$ i niech $M := \{(a, b) : a \in X \wedge \ b \in \mathbb{R}^+\} \ \cup \ \{(0, 0)\}$, wtedy na podstawie (6) zbiory M i X są równoliczne, istnieje więc bijekcja $f : X \longrightarrow M$. Niech (M, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Rozpatrzmy funkcję $\bar{\varrho} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$\bar{\varrho}(x_1, x_2) := \varrho(f(x_1), f(x_2)).$$

Na podstawie twierdzenia 6 funkcja $\bar{\varrho}$ jest metryką. Z twierdzenia 7 wynika, że tak zdefiniowanych metryk $\bar{\varrho}$, które nie są równoważne jest tyle ile nierównoważnych metryk ϱ, określonych na zbiorze M, których z kolei na podstawie twierdzenia 5 jest dokładnie $2^{|M|}$. Ponieważ zbiory M i X są równoliczne, to $2^{|M|} = 2^{|X|}$, co kończy dowód.

■

Z powyższego twierdzenia wynika, że w szczególności na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, jak w każdej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie $2^{\mathfrak{c}}$ metryk nierównoważnych.

Podsumowanie

Analizując cały wywód, można zauważyć, że wniosek w postaci twierdzenia 8 jest niezależny od hipotezy continuum, w skrócie (HC). W mojej pracy licencjackiej jest dowód twierdzenia dla przypadku, gdy X jest zbiorem przeliczalnym nieskończonym, co oznacza, że w przypadku przyjęcie (HC) problem ilości metryk

[14] Twierdzenie wraz z dowodem pochodzi z pracy licencjackiej (Zieliński, 2016).

nierównoważnych na zbiorze dowolnej mocy jest rozstrzygnięty. Jeżeli odrzucimy (HC) twierdzenie 8 nie pozwala rozstrzygnąć przypadku zbiorów o mocy mniejszej niż continuum, wiadomo jednak, że jak wykazał Eric Wofsey[15], niezależnie od (HC), w każdym zbiorze nieskończonym X jest $2^{|X|}$ metryk nierównoważnych.

Literatura

Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej w Krakowie, Kraków.

Błaszczyk, P.: 2012, O ciałach uporządkowanych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **6**, 15–30.

Chronowski, A.: 1997, *Elementy teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Duda, R.: 1986, *Wprowadzenie do topologii. Część I*, PWN, Warszawa.

Engelking, R., Sieklucki, K.: 1986, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa.

Krzyszkowski, J., Turdza, E.: 2005, *Elementy topologii*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Kuratowski, K.: 1973, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa.

Malec, M.: 2000, *Przestrzenie Metryczne*, AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków.

Sierpiński, W.: 1928, *Zarys teorji mnogości. Część pierwsza, Liczby pozaskończone*, Wydawnictwo Kasy Im. J. Mianowskiego, Warszawa.

Wofsey, E.: 2016, Internet. `http://tiny.pl/gk39m`.

Zieliński, M.: 2016, Ile jest nierównoważnych metryk w R?, Praca licencjacka, *Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie*, Kraków.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail marcinzielinski314@interia.pl

[15]zob. (Wofsey, 2016).